只有一个定义关系的独异点是否总能嵌入群？——单关系独异点群嵌入问题研究综述（增补版）

摘要：本文综述如下经典问题：由恰好一个定义关系给出的独异点（单关系独异点，$Mon\langle A \mid u=v\rangle$）是否总能嵌入某个群。问题的答案是否定的：特殊情形 $Mon\langle b,c \mid bc=1\rangle$（双循环独异点）即是反例，它甚至不可消去。然而否定并非全貌。本文梳理这一问题的理论脉络：从 Ore 条件与 Malcev 准恒等式障碍所构成的嵌入一般理论，到 Adian 于 1960 年给出的核心定理——对两侧非空的单关系独异点，「可消去」「嵌入同表现的群」「左右图无圈」三性质彼此等价，从而在该类中嵌入问题获得完全刻画；再到嵌入性失效之后、字问题至今悬而未决的剩余地带（$Mon\langle a,b \mid aUb=aVa\rangle$ 与 $Mon\langle a,b \mid aUb=a\rangle$ 及其对偶）。文末讨论同调有限性、Diophantine 不可判定性等现代进展，并列出主要开放问题。增补版另设两个附录：附录 A 对全文涉及的概念（表现与同余链、可消去与普遍群、左右图、特殊独异点与单位群、准恒等式）逐一给出自足的详细解释；附录 B 给出主要反例与关键方向的完整证明（含双循环独异点法式分解的合流性论证、Malcev 型反例的群论强制等式推导、可消去⟹无圈的初等链论证），以及无圈⟹嵌入定理的证明架构与 Adian 算法的完整算法定义。

关键词：独异点；半群表现；群嵌入；单关系独异点；字问题；Adian 无圈判据

1 问题的陈述与答案提要

设 A 为字母表，A^* 为自由幺半群。由表现 $Mon\langle A \mid R\rangle$ 给出的独异点是自由幺半群 A^* 在由关系集 R 生成的同余关系下的商。当 R 恰含一条关系时，称 $M = Mon\langle A \mid u=v\rangle$ 为**单关系独异点**（one-relation monoid，亦称一关系独异点），其中 $u, v \in A^*$；特别地，若一侧为空（即形如 $Mon\langle A \mid w=1\rangle$），则称其为**特殊独异点**（special monoid）。设 $Gp\langle A \mid u=v\rangle$ 为以同一字母表、把同一关系当作群关系（即 $u\,v^{-1}=1$）所表现的群。问题有强弱两种提法：

1. （弱）M 是否嵌入**某个**群？
2. （强）恒等映射是否把 M 嵌入**同表现的群** $Gp\langle A \mid u=v\rangle$？

答案提要：两个提法的答案都是否定的。 标准反例是特殊单关系独异点 $Mon\langle b,c \mid bc=1\rangle$，即双循环独异点 $B \cong \mathbb{N}\times\mathbb{N}$（乘法 $(i,j)(k,\ell)=(i+k-\min(j,k),\ j+\ell-\min(j,k))$）。设 $\varphi:B\to G$ 为任一同态、G 为群，则 $\varphi(b)\varphi(c)=1$ 给出 $\varphi(c)=\varphi(b)^{-1}$，于是 $\varphi(cb)=1$；若 φ 单射则 $cb=1$ 在 B 中成立，但 $cb=(1,1)\neq(0,0)=1$，矛盾。故 B 不嵌入任何群。注意 B 甚至不可消去：$b\cdot b^{j} = b\cdot(cb^{j+1})$ 而 $b^{j} \neq cb^{j+1}$——这与「群的子独异点必可消去」这一必要条件一致。

然而这个否定只是故事的开始。对两侧非空的单关系独异点，嵌入问题有出人意料的完全刻画（定理 B）；真正困难而至今未决的，是嵌入性已被否定排除的那部分区域里的字问题。下文按历史与逻辑顺序展开。

2 背景：可消去性与群嵌入的一般理论

群没有零因子，故群的任何子独异点都可消去；反之，可消去只是嵌入的必要条件。经典结果是 Ore（1931）的构造性定理：可消去独异点若再满足右可除性条件（Ore 条件），则可嵌入其「分式群」；交换情形即整环分式域的独异点版本。

一个流传甚广的错误命题是 Sushkevich 于 1937 年宣布的「可消去独异点必可嵌入群」。同年 Malcev 给出反例——一个可消去但不可嵌入任何群的独异点——并在随后的两篇论文（Malcev, 1937, Math. Ann. 113 与 114）中证明：独异点可嵌入群当且仅当它满足一列可数无穷条准恒等式（quasi-identities），且**任何有限子集都不充分**。这组「Malcev 条件」说明嵌入性本质上超越有限公理化，也解释了为何对有限表现独异点寻找「可读出」的嵌入判据是困难而有价值的。Adian（1955）进一步证明存在有限表现的、字问题（整除问题）不可判定的可消去半群，表明可消去类的算法行为同样恶劣。嵌入问题的历史详见 Hollings（2014）的专书与 Nyberg-Brodda（2021）的综述。

在此背景下，一个自然的问题浮现：**对怎样「小」的关系类，嵌入性可以完全回答？** 单关系独异点是这一问题最经典的试验场。

3 Adian 的无圈判据：单关系情形的完全刻画

3.1 左右图与无圈性

设 $M = Mon\langle A \mid R\rangle$，$R$ 中每条关系 $u_i{=}v_i$ 两侧非空。定义**左图** $\mathscr{L}(M)$：顶点集为 A，对每条关系 $u_i{=}v_i$，在「u_i 的首字母」与「v_i 的首字母」之间连一条无向边（允许环与重边）；**右图** $\mathscr{R}(M)$ 用尾字母对偶地定义。若 $\mathscr{L}(M)$ 与 $\mathscr{R}(M)$ 皆为森林（无圈），则称表现是**无圈的**（cycle-free）。无圈性从表现可直接读出、可有效判定。

3.2 两条核心定理

定理 *A*（Adian, 1960a）。若有限表现独异点 $M = Mon\langle A \mid R\rangle$ 无圈，则 M 可消去，且恒等映射把 M 嵌入同表现的群 $Gp\langle A \mid R\rangle$。

Remmers（1980）用半群图（diagram）方法把定理 A 推广到非有限表现的无圈独异点；Stallings 给出过图论证明；系统概述见 Higgins（1992）教材。

定理 *B*（Adian, 1960a，**推论 4 与 5**）。设 $M = Mon\langle A \mid u{=}v\rangle$ 为单关系独异点，$u, v \in A^{+}$ 两侧非空且 $u \neq v$（非平凡关系；退化情形 $u{\equiv}v$ 时关系平凡，M 为自由幺半群，显然可嵌入，而左右图因出现环边而有圈，等价性须排除此情形）。则下列三条等价：

1. M 可消去；
2. M 嵌入 $Gp\langle A \mid u{=}v\rangle$；
3. 表现无圈。

等价链条的补全只需注意到：若 M 嵌入**某个**群，则 M 可消去；由 (1)$\Longrightarrow$(3)，又得无圈；再由定理 A 得嵌入同表现群。于是对两侧非空的单关系独异点，以下四条**彼此等价**：可消去、嵌入某个群、嵌入同表现群、无圈。特别地，强、弱两种提法在此类中重合。

3.3 显式判据与推论

对单条关系，无圈性有初等显式刻画：**u 与 v 的首字母互异，且尾字母互异**。于是得到完全的二分法：

- 若首尾字母皆异，则 M 可消去且嵌入单关系群 $Gp\langle A \mid u\,v^{-1}=1\rangle$；由于单关系群的字问题可解（Magnus, 1932），M 的字问题随之可解。当代文献中的工作例证：$\mathcal{M}_d = Mon\langle a,t \mid ta^2t=(at)^d ta\rangle$（首字母 t/a 互异、尾字母 t/a 互异）嵌入相应的 Baumslag–Gersten 型单关系群（见第 6 节）。
- 若首字母相同或尾字母相同，则 M 不可消去（Adian 的等价定理给出逆否；完整初等证明见附录 B.3，定理 B8），从而**不可能嵌入任何群**。恰是在这个不可嵌入的区域里，字问题至今开放（见第 5 节）。

值得强调的是「一个关系」恰为临界点。Adian 自己给出两条关系的例子 $Mon\langle a,b,c,d,e \mid ab=cd,\ aeb=ced\rangle$：其左右图有圈、却可消去，且可证 $ae^2b \neq ce^2d$，故它不嵌入同表现群。这说明定理 A 的一般方向 (3)⟹(2)⟹(1) 的反向蕴含在两条关系时即告失败，而单关系时三者奇迹般重合。

3.4 证明思想一瞥

无圈性在证明中扮演「消去引擎」的角色：对关系两侧施加的首（尾）字母约束，使得对字 w 的任何非空分解，用关系改写时总存在一个「不被关系触及」的外围字母，从而把 $x\cdot w = y\cdot w$ 型的等式逐步「剥壳」化归为更短的情形，最终得到左、右消去律；嵌入则通过把 M 的乘法表实现为 $Gp\langle A|R\rangle$ 内的范数（或经由 Adian 图、半群图上的组合论证）建立。Remmers 的半群图与 Stallings 的图论引理是这一直觉的几何化。证明架构的分层详解、可消去⟹无圈方向的完整初等证明，以及 Adian 算法的逐步算法定义，见附录 B.4–B.5。

4 特殊情形：$Mon\langle A \mid w=1\rangle$

特殊独异点（关系形如 w=1）不落入定理 B 的适用范围，嵌入图景呈混合态，标准反例即第 1 节的双循环独异点。此类结构的中心工具是**单位群** $U(M)$ 的分析：

- **Adian 双前缀码分解**：设 w 的所有「自身无重叠」（self-overlap free，或称 hypersimple）因子分解给出极小可逆片段 $w_1,\dots,w_k$（即 $C(w)$ 是双前缀码），则 M 中每个可逆字恰等于某片段之积，且 $U(M)$ 同构于单关系（一般地 k 关系）群 $Mon\langle x_1,\dots,x_k \mid \varphi(w)=1\rangle$。例：$w=abcabdab$ 分解为 $(ab)(cabd)(ab)$，故 $U(M)\cong Mon\langle x_1,x_2 \mid x_1x_2x_1=1\rangle\cong\mathbb{Z}$。
- **Adian–Makanin 定理**（Adian 1960b；Makanin 1966 推广）：k 关系特殊独异点的单位群是 k 关系群，且 M 的字问题归约为相应 k 关系群的字问题。单关系时由 Magnus（1932）得字问题可解。这是特殊独异点理论的支柱性结果（完整证明见 Adian, 1980，第 III 章）。
- **Perrin–Schupp 定理**：本身就是群的特殊单关系独异点恰为「正的」单关系群（即容许正字关系 $w=1$ 的单关系群）。

就嵌入性而言：可消去仍是必要条件；特殊单关系独异点中既有可嵌入的例子（如 $\langle a \mid a^n=1\rangle\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，以及一切本身为群者），也有不可嵌入的反例（双循环）。与两侧非空情形的完全刻画相对照，特殊情形的嵌入性缺少一条同样简洁的统一判据，这是本领域遗留的刻画缺口之一。

5 超出嵌入性：字问题、归约与剩余开放情形

单关系独异点理论的深层动机来自字问题。Magnus（1932）证明单关系群的字问题可解；作为对照，**单关系独异点的字问题至今公开**，被视为组合代数最古老的未解问题之一。它与嵌入问题的关系是互补的：

观察（本文归纳）。第 3 节的完全刻画表明，全部字问题未决的单关系独异点（同首字母或同尾字母者，以及特殊情形中不可消去者）都落在不可嵌入区域——群论的机器（Magnus 分解、Freiheitssatz、HNN 结构）对它们失效。因此嵌入性研究所「解决」的与字问题所「遗留」的恰成正交分割。

围绕剩余情形的主要归约成果如下。

1. **压缩归约**（Adian–Oganesian, 1978）：若关系可写成 $\alpha U\alpha=\alpha V\alpha$ 或 $\alpha U\alpha=\alpha$（α 为 hypersimple 字），则字问题归约到更短关系的单关系独异点。
2. **二字母归约**（Adian–Oganesian, 1987）：一般单关系独异点的字问题归约到双生成元情形 $Mon\langle a,b \mid aUb=aVa\rangle$ 与 $Mon\langle a,b \mid aUb=a\rangle$（右可消去类）及其对偶。这两个类是公认的攻坚前沿。
3. **悬置的结果**：Oganesjan（1982）声称解决 $Mon\langle a,b \mid aUb=a\rangle$，其证明依赖 Sarkisjan（1981）关于可消去单关系独异点整除问题可判定性的定理；Adian 于九十年代在后者中发现漏洞，至今无人补全——相关结论目前只能视为猜想。
4. **逆独异点中介**（Ivanov–Margolis–Meakin, 2001）：右可消去的单关系独异点 $Mon\langle A \mid aUb=aVc\rangle$（$b\neq c$）可嵌入单关系**逆**独异点 $Inv\langle A \mid aUbc^{-1}V^{-1}a^{-1}=1\rangle$（作为其右单位幺半群）；同理 $Mon\langle A \mid aUb=a\rangle$ 嵌入 $Inv\langle A \mid aUba^{-1}=1\rangle$。于是单关系独异点的字问题归约到单关系逆独异点的字问题。注意：这些不可嵌入群的独异点仍可嵌入逆独异点——逆结构是群与独异点之间更细的过渡层。
5. **Guba 归约**：单关系独异点的字问题归约为正单关系群中前缀子幺半群的隶属问题（prefix membership problem），与 4 中对循环既约字的 Schützenberger 图分析汇流（见 Ivanov–Margolis–Meakin, 2001）。
6. **中介策略的边界**：Gray（2020, Inventiones）构造了字问题不可判定的单关系特殊逆独异点，表明「经由逆独异点证明可判定性」的策略存在内在障碍。

另一方面，在适当的（测度/概率）意义下，「几乎所有」单关系独异点的字问题是可解的；若干重要特例（如 Howie–Pride, 1986 所处理的类）亦已解决。综合现状的权威参考是 Adian–Durnev（2000）与 Nyberg-Brodda（2021）。

6 现代进展

同调与拓扑有限性。 Kobayashi（2000）问：单关系独异点是否具有同调有限性 FP∞？Gray–Steinberg（2019, arXiv:1910.09914）对每个单关系独异点 $M=Mon\langle A \mid u=v\rangle$ 构造可缩的 M-CW 复形并建立有限生成的平凡模投射分解，证明全部单关系独异点满足 FP∞ 与 $F\infty$——单关系群的 Lyndon 恒等定理的单体版本；并分类了上同调维数 ≤ 2 的单关系独异点。Gray–Steinberg（2024, Documenta Mathematica）

进一步刻画特殊独异点与其单位群之间左、右同调性质的传递，及其对特殊单关系独异点的应用。

算法行为的下界。 2026 年的工作（arXiv:2608.01983）证明：定理 *B* 意义下可嵌入的单关系独异点族 $\mathcal{M}_d = Mon\langle a,t \mid ta^2t=(at)^dta\rangle$ 的 Diophantine 问题不可判定——即便在嵌入性「良好」的类中，算法行为也可以极端恶劣。隶属问题方面，正单关系群与单关系独异点的（有理子集、子幺半群）隶属问题亦有系统推进（Canadian Mathematical Bulletin, 2024；arXiv:2305.15672）。

嵌入性的算法判据。 Chouraqui（2008）给出基于 Knuth–Bendix 完全化与 $C+C^+$ 小消去条件的半判定程序：对给定表现 $M=Mon\langle X|R\rangle$ 与同表现群 G，若完备重写系统保持正规则性质，则可**判定** M 是否嵌入 G。

7 总结

关系形态	可消去	嵌入某群	字问题		
u, v 非空；首尾字母皆异（无圈）	是（Adian 1960）	是；嵌入 $Gp\langle A\|$	$u = v\rangle$（Adian 1960）	可解（经 Magnus 1932）	
u, v 非空；首字母同或尾字母同	否（Adian 1960）	否	**开放**（归约至 $Mon\langle a,b\|$	$aUb = aVa\rangle$、$Mon\langle a,b\|$	$aUb = a\rangle$ 及对偶）
特殊：$w=1$	混合	混合（$\langle a\|$	$a^n=1\rangle$ 可；双循环否）	可解（Adian 1960；Makanin 1966）	

对题设问题「只有一个定义关系的独异点是否总能嵌入某个群」的回答是：**不总能**——双循环独异点 $Mon\langle b,c \mid bc=1\rangle$ 是不可逾越的反例。但对两侧非空的单关系独异点，Adian 在 1960 年即给出完全刻画：可嵌入当且仅当可消去，当且仅

当关系两侧首尾字母皆异；此时嵌入目标可取为同表现的单关系群。理论的剩余难点不在嵌入性本身，而在不可嵌入区域的字问题——两个双生成元类 $Mon\langle a,b \mid aUb=aVa\rangle$ 与 $Mon\langle a,b \mid aUb=a\rangle$（及其对偶）至今悬而未决，其间 Sarkisjan（1981）证明中的漏洞仍未补全。

主要开放问题：

1. 单关系独异点的字问题是否可判定（等价地，上述两个二生成元类的字问题）？
2. Sarkisjan（1981）整除性可判定定理的漏洞能否修复？
3. 特殊单关系独异点 $Mon\langle A \mid w=1\rangle$ 群嵌入性的统一判据（介于 Perrin–Schupp 的「是群」情形与双循环反例之间）；
4. 单关系独异点是否容许有限完全重写系统（与 FP∞ 已解的 Kobayashi 问题相对应的「两侧」版本，见 Gray–Steinberg, 2024）。

附录 A 相关概念详解

A.1 幺半群表现、初等变换与同余链

固定字母表 A。A 上的**字**是字母的有限序列（含空字 1），全体记 A^*，以连接为乘法构成自由幺半群。A^* 上的**同余**是与乘法相容的等价关系（$w\sim w'$ 蕴含 $pwq\sim pw'q$）。由关系集 $R=\{u_i=v_i\}$ **生成**的同余 $\sim_R$ 是一切含所有数对 (u_i, v_i) 的同余之交；商 $A^*/\sim_R$ 即表现 $Mon\langle A \mid R\rangle$ 给出的独异点。两个基本判定问题：**字问题**（给定 w, w'，判定 $w \sim_R w'$ 与否）与**（左）整除问题**（给定 p, q，判定是否存在 r 使 $rp \sim_R q$）。

这一切的**工作语言是初等变换链**：若字 w 可写成 $x\,u_i\,y$（x, y 为任意字），则 $x\,v_i\,y$ 与它同余——这样的一步改写称为一次**初等变换**（把 u_i 换成 v_i 或反向）。基本事实：$w \sim_R w'$ 当且仅当存在有限链 $w = w_0 \to w_1 \to \dots \to w_k = w'$，每步一次初等变换。它把代数问题（同余类）化为组合问题（链的存在性），附录 B 的全部论证都在这条语言上进行。

A.2 可消去性、Ore 条件与普遍群

M 称为**左可消去**，若 $pq = pr$ 蕴含 $q = r$；右可消去对偶；两者合称可消去。

引理 A.1（必要性）。群的任何子独异点可消去。

证：$pq = pr$ 在群中成立时，左乘 p 的逆元即得 $q = r$。□

因此可消去是嵌入的必要条件，但一般不充分（B.2 的 Malcev 例）。Ore（1931）给出第一个充分条件：可消去且满足右可除性（任意 $m, n \in M$ 存在 p, q 使 $mp = nq$）的独异点可嵌入其「分式群」$G(M)$——把形式分式 $m\ n^{-1}$ 按消去律拼接所成的群；$m \mapsto m \cdot 1^{-1}$ 即嵌入。$G(M)$ 具有泛性质：M 到任何群的同态唯一延拓到 $G(M)$，故 $G(M)$ 是 M 的**最小**嵌入群（只要嵌入存在）。交换情形即整环的分式域构造。

去掉 Ore 条件后，Malcev（1937, 1939）证明：M 可嵌入群当且仅当一切「形式分式链」$a_1 b_1^{-1} a_2 b_2^{-1} \dots a_k\ b_k^{-1}$ 在分式构造中不发生「非平凡坍缩」；这一判据展开为**可数无穷条准恒等式**（见 A.5），且任何有限子集都不充分——嵌入性本质上超越有限公理化。

A.3 左右图与无圈判据：三个实例

左图 $\mathscr{L}(M)$：顶点集 A；对每条关系 $u_i = v_i$，在 first(u_i) 与 first(v_i) 之间连一条无向边；右图 $\mathscr{R}(M)$ 用尾字母对偶。允许环边与重边；**森林（无圈）**指无任何圈——注意一对重边即构成一个圈。三例：

1. $Mon\langle a, b \mid ab = ba\rangle$：$\mathscr{L}$ 与 $\mathscr{R}$ 各为单边 $\{a, b\}$，森林 $\Longrightarrow$ 可消去、嵌入 $\mathbb{Z}^2$（完整证明见 B.4 之最小实例）。
2. $Mon\langle a, b \mid ab = b^2 a\rangle$：首字母 a/b 互异、尾字母 b/a 互异 $\Longrightarrow$ 无圈 $\Longrightarrow$ 嵌入同表现群，即 Baumslag–Solitar 群 BS(1,2)（因 $ab = b^2 a$ 等价于 $aba^{-1} = b^2$）。注意并非该群的每个元素都形如（像幺半群元素的）分式——见 Meakin（2007）引 Stallings 的讨论。

3. Malcev 例 $Mon\langle a, b, c, d, e \mid ab = cd,\ aeb = ced\rangle$：两条关系给出左图的边 $\{a, c\}$ 与 $\{a, c\}$——**一对重边，即一个圈**；右图同样有重边 $\{b, d\}$。故表现有圈，无圈判据对此例失效——事实上它可消去而不可嵌入（*B*.2），这正说明无圈性在两条关系时已与可消去性分离。

直观解释：左图记录「字的第一个字母经改写可能变成什么」。顶点 a 处的一条边 a–c 表示：某关系可把以 a 打头的片段换成以 c 打头的片段。若这些配对首尾相接成圈，改写便可在同一位置循环产生不同字首，「稳定首字母」消失，剥壳式消去论证失去支点；森林情形恰保证逐层剥离总能进行——这就是 *B*.4 证明架构的核心。

A.4 特殊独异点与单位群

特殊独异点是关系形如 $w = 1$ 的表现 $Mon\langle A \mid w = 1, \ldots\rangle$。其**单位群** $U(M) = \{g :$ 存在 h，$gh = hg = 1\}$ 是全部可逆元构成的子群。Adian 的**双前缀码递归**：令 $C_0 = \{w\}$；若 C_i 中两字 x, y 有重叠（即 $x \equiv vu$, $y \equiv u\,w$，公共段 u 非空），则置 $C_{i+1} = (C_i \setminus \{x, y\}) \cup \{u, v, w\}$；每步总长严格变短，故过程稳定于某有限集 C_k，它是一个**双前缀码**（任何两字互不重叠）。Adian（1966, III.§4）：$U(M)$ 同构于以 C_k 中字为新字母、以 $\varphi(w) = 1$ 为关系的群，φ 把每个片段映到其新字母。例（正文 §4）：$w = abcabdab = (ab)(cabd)(ab)$，$C_k = \{ab, cabd\}$，$U(M) \cong \langle x_1, x_2 \mid x_1x_2x_1 = 1\rangle \cong \mathbb{Z}$。配合 **Adian–Makanin 定理**（M 的字问题归约到 $U(M)$ 的字问题），单关系特殊独异点 $Mon\langle A \mid w = 1\rangle$ 的字问题由 Magnus 定理（*B*.5）解出——这是特殊情形唯一被完全攻克的方向。

A.5 准恒等式与 Malcev 条件

准恒等式是形如「若 $t_1 = s_1$ 且 … 且 $t_k = s_k$，则 $t = s$」的全称命题，其中各 t, s 为字。群类满足的准恒等式自动被群的子独异点继承——因为子独异点中的每个等式前提在群中也成立。故嵌入群的候选必须满足一切群准恒等式；反之 Malcev 证明：对可消去独异点，这些条件合起来也是充分的。条件无穷多层：第 1 层即消去律；第 2 层的具体形状见 *B*.2——它恰是 Malcev 反例的失败处。对每

个层数 N 都存在满足前 N 层而在第 N+1 层失败的独异点，故任何有限子集都不充分（Malcev 1937；系统见 Clifford–Preston 卷 II §12）。

附录 *B* 主要定理的证明详解

记号与约定。本附录固定 $M = Mon\langle A \mid u = v\rangle$（$u, v \in A^{+}$，除非特别声明 $u \neq v$）；字相等记 $\equiv$，同余记 $\sim$；first(w)、last(w) 分别为首、尾字母。初等变换与链如 $A.1$。

B.1 反例之一：双循环独异点不可嵌入（完整证明）

引理 B1（法式分解）。在 $B = Mon\langle b, c \mid bc = 1\rangle$ 中，每个同余类恰含一个形如 $c^{i}\,b^{j}$（$i, j \geq 0$）的字。

证：考察单规则重写系统 $bc \to 1$（把字中的因子 bc 删去）。**终止性**：每步长度减二。**无临界对**：两个 bc 因子若重叠，则某位置 t 同时满足 $w_t = b$、$w_{t+1} = c$ 且 $w_{t+1} = b$，矛盾；故红因子两两不交，施行其一不影响其余（不交因子经删除后仅平移位置，因子本身完好），局部合流成立。由 Newman 引理（终止＋局部合流 $\Longrightarrow$ 合流），每个字的范式存在且唯一。范式即不含因子 bc 的字；而字不含 bc 因子当且仅当它形如 $c^{i}\,b^{j}$：若某 b 之后仍有 c，取该 b 之后第一个 c，其间若隔有字则皆非 c、必为 b，末一个 b 紧邻那个 c 产生因子 bc，矛盾。□

引理 B2（乘法公式）。$(c^{i}\,b^{j})(c^{k}\,b^{\ell}) = c^{\,i+k-\min(j,k)}\;b^{\,j+\ell-\min(j,k)}$；特别地 $B \cong \mathbb{N}\times\mathbb{N}$。

证：中段 $b^{j}\,c^{k}$：若 $j, k \geq 1$，则 $b^{j}\,c^{k} = b^{j-1}(bc)c^{k-1} = b^{j-1}c^{k-1}$，归纳至 j, k 中较小者耗尽：$j \geq k$ 时得 b^{j-k}，$k > j$ 时得 c^{k-j}。合并即得公式。□

定理 B3（不可嵌入与不可消去）。(i) $cb \neq 1$（cb 的范式为 $c^{1}b^{1} \neq 1 = c^{0}b^{0}$）；(ii) B 不嵌入任何群；(iii) B 左右皆不可消去。

证：(i) 由引理 B1 的唯一性。(ii) 设 $\varphi : B \to G$ 为群同态。$\varphi(b)\varphi(c) = 1$ 给出 $\varphi(c) = \varphi(b)^{-1}$，于是 $\varphi(cb) = 1$。若 φ 单射，则 $cb = 1$ 在 B 中成立，与 (i) 矛盾。(iii)

$b\cdot 1 = b = (bc)b = b\cdot(cb)$，而 $1 \neq cb$，左消去失效；对偶地 $1\cdot c = c = (bc)c = b\cdot c^2$ 而 $1 \neq bc^2$，右消去失效。□

B.2 反例之二：Malcev 型独异点——可消去而不可嵌入（核心推导完整证明）

设 $M_5 = Mon\langle a, b, c, d, e \mid ab = cd, aeb = ced\rangle$。

引理 B4（群中的强制等式）。设 G 为群，$a, b, c, d, e \in G$ 满足 $ab = cd$ 且 $aeb = ced$。令 $h = bd^{-1}$。则：(i) $ah = c$；(ii) $aeh\,e^{-1} = c$；(iii) h 与 e 交换；(iv) 对一切 $n \geq 0$：$ae\text{^}n\ b = ce\text{^}n\ d$。

证：(i) $ab = cd$ 给出 $a = cdb^{-1}$，故 $ah = cdb^{-1}bd^{-1} = c$。(ii) $aeb = ced$ 给出 $ae = cedb^{-1}$，故 $aeh\,e^{-1} = cedb^{-1}\cdot bd^{-1}e^{-1} = ced\,d^{-1}\,e^{-1} = c\,e\,e^{-1} = c$。(iii) 比较 (i)(ii)：$ah = aeh\,e^{-1}$，群中左消去 a 得 $h = eh\,e^{-1}$。(iv) $ae\text{^}n\ b\cdot(ce\text{^}n\ d)^{-1} = a\,e\text{^}n\ b\,d^{-1}\,e^{-n}\,c^{-1} = a\,e\text{^}n\ h\,e^{-n}\,c^{-1} = a\,h\,c^{-1}$（由 (iii)，$e$ 的各次幂与 h 交换）$= 1$。□

引理 B5（孤立字）。在 M_5 中 $ae^2b \equiv aeeb$ 与 $ce^2d \equiv ceed$ 都不含任何关系侧为因子（$aeeb$ 的长 2、3 因子为 ae, ee, eb 与 aee, eeb，皆 $\notin \{ab, cd, aeb, ced\}$；$ceed$ 的为 ce, ee, ed 与 cee, eed，同样皆不在），故二字的同余类均为单元素集，而两字不同 $\Longrightarrow ae^2b \neq ce^2d$ 在 M_5 中成立。

证：不含关系侧为因子的字无从施行任何初等变换，故其同余类只含自身；链刻画（*A*.1）给出结论。□

定理 B6（M_5 不可嵌入任何群）。

证：设 $\varphi : M_5 \to G$ 单射。两关系 $ab = cd$、$aeb = ced$ 在 M_5 中成立，故其像满足引理 B4 的前提；取 $n = 2$ 得 $\varphi(ae^2b) = \varphi(ce^2d)$，单射性给出 $ae^2b = ce^2d$，与引理 B5 矛盾。□

注。$n = 0, 1$ 两层在 M_5 中成立（即两条关系本身），$n = 2$ 层失败——这是 Malcev 条件「分层失效」的具体展示（*A*.5）。M_5 的可消去性是 Adian（1966, II,

定理 7）的结论：两条关系都是等长且两侧无自叠的字，经链分析可证；完整论证见该文献（亦见 Lallement 1993 的概述）。

B.3 可消去 ⟹ 无圈：完整初等证明

引理 B7（关键引理）。设 $u \equiv aU, v \equiv aV$（首字母相同），$U \not\equiv V$（作为字）。则在 M 中 $U \sim V$ 不成立。

证：反设存在链 $U = w_0 \to w_1 \to \dots \to w_k = V$，每步一次初等变换（把某处出现的 u 换成 v，或反之）。每步长度改变 $\delta = |v| - |u| = |V| - |U|$。分两案：

案一 $|U| \neq |V|$：则 $\delta \neq 0$，而链的总长变化 $|V| - |U| = k \cdot \delta$，故 $k = 1$。于是 V 由 U 经**单次**替换得到，这要求 U 含 u 或 v 为因子。若 $U \equiv X(aU)Y$，则 $|U| = |X| + 1 + |U| + |Y|$，矛盾；若 $U \equiv X(aV)Y$ 且替换后 $V \equiv X(aU)Y$，则 $|U| = |X| + 1 + |V| + |Y|$ 且 $|V| = |X| + 1 + |U| + |Y|$，相减得 $|U| = |V|$，与案设矛盾。故链不存在。

案二 $|U| = |V|$：则 $\delta = 0$，链中每字长 $|U|$；但 $|u| = |v| = 1 + |U|$，U 比两条关系词都短，不含其为因子，第一个改写便无从施行——U 的同余类就是 $\{U\}$，而 $U \not\equiv V$。□

定理 B8（(1)⟹(3)）。设 $u \not\equiv v$。若 $\text{first}(u) \equiv \text{first}(v)$，则 M 左不可消去；若 $\text{last}(u) \equiv \text{last}(v)$，则 M 右不可消去。特别地：M 可消去（或仅嵌入某群）⟹ 首字母互异且尾字母互异 ⟹ 表现无圈。

证：设 $\text{first}(u) \equiv \text{first}(v) \equiv a$，$u \equiv aU, v \equiv aV$，$U \not\equiv V$（由 $u \not\equiv v$）。引理 B7 给出 $U \sim V$ 不成立；但 $a \cdot U = u \sim v = a \cdot V$ 在 M 中成立——左消去律失效。尾字母情形：把一切字反转（rev），反转保持同余（关系 $u = v$ 反转为 $\text{rev}(v) = \text{rev}(u)$ 生成反转同余），右消去问题化为反转独异点的左消去问题，而反转关系的首字母即原尾字母，归约到已证情形。□

注。$u \not\equiv v$ 的假设不可省略：$u \equiv v$ 时关系平凡，M 是自由幺半群，可嵌入自由群，而左右图因环边而有圈——定理 B 的等价性必须在非平凡关系约定下读（正文 §3.2 已注明）。这一完整初等证明即 Adian 所说「(1)⟹(3) 可由初等变换

链的归纳得到」的全部内容；配合平凡的 (2)⟹(1) 与定理 A 的 (3)⟹(2)，定理 B 的等价环闭合。

B.4 无圈 ⟹ 嵌入：定理 *A* 的证明架构

定理 B9（Adian, 1960a, 定理 5）。设 $M = Mon\langle A \mid R\rangle$ 为有限表现独异点。若表现无圈（左右图皆森林），则 M 可消去，且恒等映射把 M 嵌入 $Gp\langle A \mid R\rangle$。Remmers（1980）用半群图方法把它推广到任意（不限有限表现）无圈独异点。

这是全文唯一未给出完整证明的核心定理——其完整组合论证在原始文献中占数十页。以下给出三种等价进法的精确架构与文献指引；三者本质上使用同一个组合核心。

进法一（Adian 的音节归纳，1960a；详述于 Adian 1966, 第 II 章）。对关系集的规模与关系词总长作双重归纳。森林必有叶：左图（或右图）中度为 1 的顶点对应一个「外围字母」，它在各关系词首（尾）字母的配对中出现次数最少。归纳步的核心：利用叶字母的出现约束，把 $Mon\langle A \mid R\rangle$ 的消去律与嵌入问题化归到一个删去该字母后更小的无圈表现 $Mon\langle A' \mid R'\rangle$；基底是空关系集的自由幺半群。技术核心是证明任何同余链中，涉及叶字母的改写可以「外推」到链的两端而不改变链的首尾，由此 (i) 每个同余类含不可再改写的范式，(ii) 范式唯一性给出可消去，(iii) 在 $Gp\langle A \mid R\rangle$ 中范式代表元相等即字相等，给出单射性。完整细节见 Adian（1966, 第 II 章）。

进法二（Remmers 的半群图，1980）。把同余链几何化：等式 $w \sim w'$ 对应平面上由关系词拼贴出的半群图；无圈性保证拼贴不产生闭路缠绕，「剥壳」对应图的边界路径收缩。可消去与嵌入由图的平面组合直接读出。系统概述见 Higgins（1992, 1.§7 与 5.§3）。

进法三（Stallings 的图论证明）。Stallings 把 Adian 表现对应到一张标记图上的折叠过程，用一条图论引理（折叠的合流性）重证嵌入定理；转述见 Meakin（2007）。

强化（Valitskas；Guba，1994）。左图无圈＋右可消去（不必右图无圈）已足以保证嵌入群——这是定理 B9 的实质性加强，证明见 Guba（1994）。

最小完整实例。$Mon\langle a,\, b \mid ab = ba\rangle$：定义 $\varphi : \mathbb{N}^2 \to M$，$(i, j) \mapsto a\text{^}i\ b\text{^}j$；交换关系给出乘法 $(i, j)(k, \ell) = (i{+}k, j{+}\ell)$，故 φ 是独异点同构 $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to M$；又 $\psi : M \to \mathbb{Z}^2$，$(i, j) \mapsto (i, j)$（把关系 $ab = ba$ 当作群关系即 $\mathbb{Z}^2$）是同态；$\varphi\circ\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^2}$ 而 $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^2}$，故 ψ 为单射，M 嵌入 $\mathbb{Z}^2 = Gp\langle a, b \mid ab = ba\rangle$。□

合成。单关系情形：无圈（B9）$\Longrightarrow$ 嵌入同表现群；嵌入某群 $\Longrightarrow$ 可消去 $\Longrightarrow$ 无圈（B8）。于是定理 B 的三性质等价环闭合，且强弱两种嵌入提法重合。

B.5 嵌入之后的字问题：Magnus 归约与 Adian 算法

定理 B10（Magnus，1932）。单关系群 $Gp\langle A \mid u\, v^{-1}\rangle$ 的字问题可判定。

证明架构：设 $r = u\, v^{-1}$ 循环既约。**Freiheitssatz**：若 r 非单个字母的幂，则 A 的任何真子集 Y（r 至少一个字母不在其中）在 $Gp\langle A \mid r\rangle$ 中生成自由子群。Magnus 归纳（对 $|r|$ 与字母数）：把关系循环共轭改写为 $y^{-1}\, s\, y = t$ 形（$y \notin \{s, t\}$ 的字母），则 G 分解为两个更短关系群的融合自由积（沿 $\langle t\rangle = \langle s\rangle$ 粘合）；Freiheitssatz 恰好保证粘合子群自由、嵌入良好，字问题随之归约为子群隶属问题与更短关系情形。逐行细节见 Magnus（1932）与 Magnus–Karrass–Solitar《Combinatorial Group Theory》相应章节。**推论**：无圈单关系独异点 M 的字问题可解——把字问题交给嵌入像（定理 B9），在 $Gp\langle A \mid u = v\rangle$ 中用 Magnus 程序判定。

Adian 算法 $\mathfrak{A}$（1976）。这是开放区域（左无圈而整体有圈的单关系独异点）上的核心半判定程序，此处给出完整算法定义（依 Adian 1976；Lallement 1993 的表述）。设 $M = Mon\langle a, b \mid u = v\rangle$ 左无圈。对字 w：**前缀分解** = 把 w 从左起逐段切成「u 或 v 的极大真前缀」；若某段恰为 u 或 v，分解停止，该段称**头**；无头的分解称**无头分解**。算法 $\mathfrak{A}$ 判定 w 是否左可被字母 x 整除：(1) 若 w 以 x 开

头，停，输出「是」；(2) 否则计算 w 的前缀分解：无头 $\Longrightarrow$ 停，输出「否」；有头 $\Longrightarrow$ 把头换成关系的另一侧，得新字，回到 (1)。

定理 B11（Adian, 1976）。对输入 (w, x)，$\mathfrak{A}$ 恰有三种结局：有限步后到达 x 开头的字；有限步后落在无头分解；无限循环。w 左可被 x 整除当且仅当结局为一，且此时 $\mathfrak{A}$ 给出最短证明。

例（运行实例，转述自 Lallement 1993）。$M = Mon\langle a, b \mid baababa = aba\rangle$（首字母 b/a 互异，左无圈；尾字母同，右有圈）。问 $w \equiv abbaaababab$ 是否左可被 b 整除：前缀分解为 $ab \mid baa \mid aba \cdot bab$，头 aba 换成 $baababa$；迭代数步后到达 $b \cdot aababababaababababab$，答案为是。**例（循环）**。$M' = Mon\langle a, b \mid baabbaa = a\rangle$，输入 $bbaaa$ 与字母 a：$\mathfrak{A}$ 进入循环，故答案为否。结合左可消去性（对整除因子长度归纳），$\mathfrak{A}$ 给出左无圈单关系独异点左整除问题的半判定；Adian 进一步猜想存在检测循环的算法 $\mathfrak{B}$——这等价于单关系独异点字问题可判定猜想（正文 §5），至今悬而未决。

[1] Ore Ø. Linear equations in non-commutative fields[J]. Annals of Mathematics, 1931, 32(3): 463–477.

[2] Malcev A. Über die Einbettung von assoziativen Systemen in Gruppen. I[J]. Mathematische Annalen, 1937, 113: 686–691; II[J]. Mathematische Annalen, 1937, 114: 335–340.

[3] Adjan S. I. On the embeddability of semigroups in groups[J]. Doklady Akademii Nauk SSSR, 1960, 133(2): 255–257. (in Russian)

[4] Adjan S. I. The identity problem in associative systems of a special form[J]. Doklady Akademii Nauk SSSR, 1960, 135(6): 1297–1300. (in Russian)

[5] Adjan S. I. The Burnside Problem and Identities in Groups[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1979.（俄文原版：Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп, Труды МИАН СССР, № 85, 1966；第 II 章含单关系半群嵌入定理的完整证明，第 III 章为特殊独异点理论）

[6] Magnus W. Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (der Freiheitssatz)[J]. Mathematische Annalen, 1932, 105: 141–165.

[7] Adjan S. I., Oganesyan G. U. On problems of equality and divisibility in semigroups with a single defining relation[J]. Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematicheskaya, 1978, 42(2): 219–225. (in Russian)

[8] Sarkisjan O. A. On the word and divisibility problems in semigroups and groups without cycles[J]. Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematicheskaya, 1981, 45(6): 1424–1440. (in Russian)

[9] Oganesjan G. U. Semigroups with one relation and semigroups without cycles[J]. Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematicheskaya, 1982, 46(1): 88–94. (in Russian)

[10] Adjan S. I., Oganesyan G. U. On the word and divisibility problems for semigroups with one relation[J]. Matematicheskie Zametki, 1987, 41(3): 412–421. (in Russian)

[11] Howie J., Pride S. J. The word problem for one-relator semigroups[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1986, 99(1): 33–44.

[12] Ivanov S. V., Margolis S. W., Meakin J. C. On one-relator inverse monoids and one-relator groups[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2001, 159: 83–111.

[13] Gray R. Undecidability of the word problem for one-relator inverse monoids via right-angled Artin subgroups of one-relator groups[J]. Inventiones Mathematicae, 2020, 219.

[14] Gray R., Steinberg B. A Lyndon's identity theorem for one-relator monoids[J/OL]. arXiv:1910.09914, 2019.

[15] Gray R., Steinberg B. Topological finiteness properties of monoids II: special monoids, one-relator monoids, amalgamated free products, and HNN extensions[J]. Documenta Mathematica, 2024. doi:10.4171/dm/959.

[16] Nyberg-Brodda C.-F. The word problem for one-relation monoids: a survey[J]. Semigroup Forum, 2021, 103(2): 447–483. doi:10.1007/s00233-021-10216-8.

[17] Adjan S. I., Durnev V. G. Algorithmic problems for groups and semigroups[J]. Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 2000, 55(2): 3–94. (in Russian)

[18] Chouraqui F. Rewriting systems and embedding of monoids in groups[EB/OL]. arXiv:0804.1206, 2008.

[19] Hollings C. Mathematics across the Iron Curtain: The Theory of Semigroups in Russia[M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 2014.

[20] Higgins P. M. Techniques of Semigroup Theory[M]. Oxford: Oxford University Press, 1992.（含 Remmers 半群图方法对无圈独异点嵌入定理的推广与系统性概述）

[21] Adian S. I. Defining relations and algorithmic problems for groups and semigroups[J]. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 1966, No. 85. Providence, RI: American Mathematical Society.（单关系半群嵌入定理完整证明：第 II 章；特殊独异点理论：第 III 章）

[22] Adian S. I. Word transformations in a semigroup given by a system of defining relations[J]. Algebra and Logic, 1976, 15(6): 379–386.（算法 $\mathfrak{A}$ 与定理 B11）

[23] Remmers J. H. On the geometry of semigroup presentations[J]. Advances in Mathematics, 1980, 36(3): 283–296.

[24] Guba V. S. Conditions for the embeddability of semigroups into groups[J]. Mathematical Notes, 1994, 56(1–2): 763–769.（Valitskas 强化命题的证明）

[25] Lallement G. The word problem for semigroups presented by one relation[C]//Semigroups (Luino, 1992). River Edge, NJ: World Scientific, 1993: 167–173.（算法 $\mathfrak{A}$ 的英文详述）

[26] Meakin J. C. Groups and semigroups: connections and contrasts[C]//Groups St Andrews 2005, Vol. 2. London Mathematical Society Lecture Note Series 340. Cambridge: Cambridge University Press, 2007: 357–400.（含 Stallings 图论证明的转述与 BS(1,2) 实例）

[27] Clifford A. H., Preston G. B. The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. II[M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1964.（Malcev 嵌入条件的系统表述：§12）

（说明：文中涉及的当代预印本，如单关系独异点与单关系群的 Diophantine 问题不可判定性（arXiv:2608.01983, 2026）、正单关系群与单关系独异点的隶属问题（arXiv:2305.15672；Canadian Mathematical Bulletin, 2024），以及 Perrin–Schupp 关于正单关系群与特殊单关系独异点的定理、Makanin（1966）的博士论文工作，均转引自文献 [15][16] 及 MathOverflow 的专题讨论，未单独列目。）